



Bazele Tehnologiei Informației

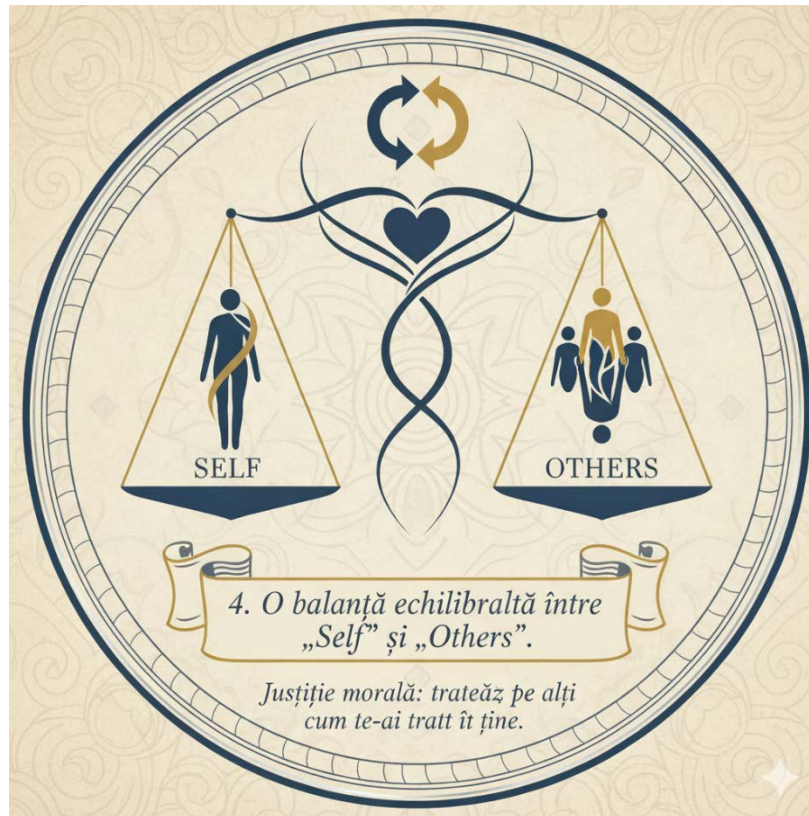
Curs 6

Introducere în Bazele logice ale calculatoarelor

Prof. dr. Răzvan Daniel Zota
Facultatea de Cibernetică, Statistică și Informatică Economică
ASE București
<https://zota.ase.ro/bti>

În loc de “introducere”

“Ce ție nu-ți place, altuia nu-i face!”



Bazele logice ale calculatoarelor - Introducere

VLSI (Very Large Scale Integration)

- Procesul de creare a CI prin combinarea a mii/sute de mii/milioane de porți logice (tranzistori) pe un singur cip de siliciu.
- Microprocesorul este un echipament VLSI
- Începuturile VLSI: anii '70



Bazele logice ale calculatoarelor - Introducere

ULSI (Ultra Large Scale Integration) – cipuri cu peste 1 milion de componente

De exemplu, un **Intel® Xeon Core i7 E3 Broadwell** are **3,2 miliarde** de tranzistori pe o arie de numai 133 mm². Un **Core i9** (gen. 14) are între 20-25 miliarde de tranzistori pe cip.

Procesoarele GPU de supercomputing de la Intel, Ponte Vecchio și GPU-urile Nvidia sunt printre lideri.

Cel mai recent GPU al Nvidia, bazat pe arhitectura Blackwell, a stabilit noi recorduri în număr de tranzistori, cu **208 miliarde** de tranzistori pe unitate.



Bazele logice ale calculatoarelor - Introducere

Astăzi, un chipset A17 Pro dintr-un iPhone înglobează **19 miliarde de tranzistori**, iar un procesor Apple M1 Ultra are integrați peste **114 miliarde de tranzistori** în cip.



Legea lui Gordon Moore

Moore's Law: The number of transistors on microchips doubles every two years

Our World
in Data

Moore's law describes the empirical regularity that the number of transistors on integrated circuits doubles approximately every two years. This advancement is important for other aspects of technological progress in computing – such as processing speed or the price of computers.

Transistor count

50,000,000,000

10,000,000,000

5,000,000,000

1,000,000,000

500,000,000

100,000,000

50,000,000

10,000,000

5,000,000

1,000,000

500,000

100,000

50,000

10,000

5,000

1,000

Year in which the microchip was first introduced

Data source: Wikipedia (wikipedia.org/wiki/Transistor_count)

Creștere exponențială în puterea de calcul!

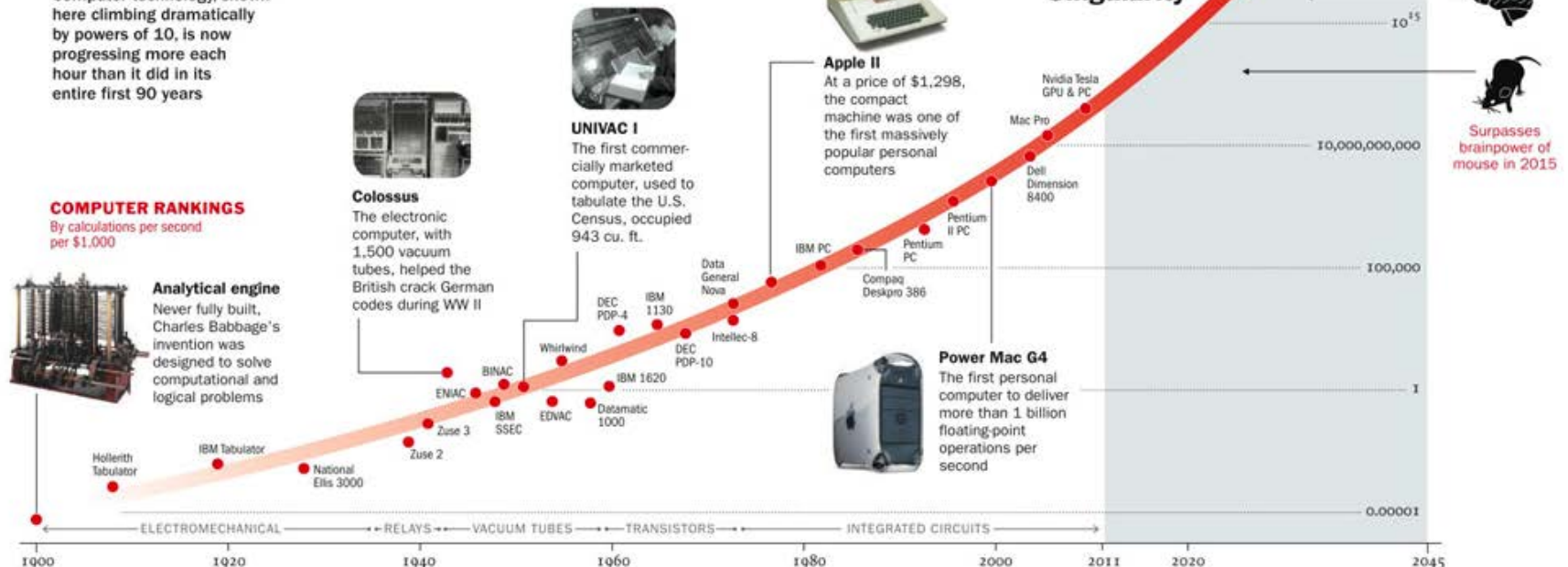
1 The accelerating pace of change ...



2 ... and exponential growth in computing power ...

Computer technology, shown here climbing dramatically by powers of 10, is now progressing more each hour than it did in its entire first 90 years

3 ... will lead to the Singularity



Source: <http://content.time.com/time/interactive/0,31813,2048601,00.html>

Introducere

- Componente digitale
- Electronica digitală (+5V, -5V), (0V, -5V), (0V, +5V)

Introducere

Algebra Boole

Operații (legi de compoziție) de bază:

- Disjuncție (sau)
- Conjuncție (și)
- Negație

Tabele de adevăr – disjuncție, conjuncție, negație

p	q	p AND q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p OR q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	p AND q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	~ p
T	F
F	T

Teoremele fundamentale ale algebrei Boole

1. Teoremele reuniunii și intersecției:

- Există un element 0 numit **prim element** cu proprietățile:
 $x \cap 0 = 0$ și $x \cup 0 = x$
- Există un element 1 numit **ultim element** cu proprietățile:
 $x \cap 1 = x$ și $x \cup 1 = 1$

2. Teoremele de unicitate:

- Elementul 1 este unic
- Elementul 0 este unic

3. Teoremele complementării:

- Principiul contradicției: $x \cap \bar{x} = 0$
- Principiul terțului exclus: $x \cup \bar{x} = 1$

Teoremele fundamentale ale algebrei Boole (cont.)

4. Teorema dublei negații: $\overline{\overline{x}} = x$

5. Teoremele absorbției:

- $x \cup (x \cap y) = x$
- $x \cap (x \cup y) = x$

6. Teoremele lui DeMorgan:

$$\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$$

$$\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$$

Teoremele fundamentale ale algebrei Boole (cont.)

7. Teoremele de idempotență:

$$x \cup x \cup \dots \cup x = x$$

$$x \cap x \cap \dots \cap x = x$$

8. Teoremele de comutativitate, asociativitate și distributivitate pentru cele 2 legi de compoziție:

- $x \cup y = y \cup x$
- $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$
- $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$
- $x \cap y = y \cap x$
- $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$
- $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

Existența și unicitatea funcțiilor booleene

$$B_2 = \{0, 1\}$$

$$f : B_2 \rightarrow B_2$$

$$f : B_2 \times B_2 \rightarrow B_2$$

$$f : \underbrace{B_2 \times B_2 \times \cdots \times B_2}_{n \text{ ori}} \rightarrow B_2$$

Definiții

S.n. ***produs elementar/suma elementară*** un ***produs/suma*** de variabile ***și/sau*** negațiile lor

S.n. ***formă canonică disjunctivă (FCD)*** a unei relații logice funcționale, o relație echivalentă (cu aceeași valoare de adevăr) care este o ***sumă de produse*** elementare construite cu aceleași variabile ca și relația dată inițial, fiecare produs conținând toate variabilele posibile (ele sau complementarele lor)

Definiții

S.n. *formă canonică conjunctivă (FCC)* a unei relații logice funcționale, o relație echivalentă (are aceeași valoare de adevăr) care este un ***produs de sume*** elementare construite cu aceleași variabile ca și relația dată inițial, fiecare sumă conținând toate variabilele posibile (ele sau complementarele lor)

FCD pentru o funcție cu o singură variabilă

Fie $f : B_2 \rightarrow B_2$ o funcție booleană de o singură variabilă și a, b două constante booleene

$f(x) = ax \cup b\bar{x}$ - forma canonica disjunctiva

$f(x) = (a \cup x)(b \cup \bar{x})$ - forma canonica conjunctiva

Aceste functii sunt unic determinate.

Inlocuim $x = 1, x = 0$ in relatia lui $f(x)$:

$$\begin{cases} f(1) = a \bullet 1 \cup b \bullet \bar{1} = a \bullet 1 \cup b \bullet 0 = a \cup 0 = a \\ f(0) = a \bullet 0 \cup b \bullet \bar{0} = a \bullet 0 \cup b \bullet 1 = 0 \cup b = b \end{cases}$$

$$FCD: f(x) = f(1) \bullet x \cup f(0) \bullet \bar{x}$$

FCC pentru o funcție cu o singură variabilă

$f(x) = (a \cup x)(b \cup \bar{x})$ - forma canonica conjunctiva

Inlocuim $x = 1, x = 0$ in relatia lui $f(x)$:

$$\begin{cases} f(1) = (a \cup 1) \bullet (b \cup \bar{1}) = (a \cup 1) \bullet (b \cup 0) = 1 \bullet b = b \\ f(0) = (a \cup 0) \bullet (b \cup \bar{0}) = (a \cup 0) \bullet (b \cup 1) = a \bullet 1 = a \end{cases}$$

$$FCC : f(x) = (f(0) \cup x) \bullet (f(1) \cup \bar{x})$$

Demonstrarea existenței (FCD)

Se considera relatia $f(x) = f(1) \bullet x \cup f(0) \bullet \bar{x}$ in FCD si se inlocuieste x pe rand cu valorile 0 si 1.

$$\begin{cases} f(1) = f(1) \bullet 1 \cup f(0) \bullet \bar{1} = f(1) \bullet 1 \cup f(0) \bullet 0 = f(1) \\ f(0) = f(1) \bullet 0 \cup f(0) \bullet \bar{0} = f(1) \bullet 0 \cup f(0) \bullet 1 = f(0) \end{cases}$$

Demonstrarea existenței (FCC)

Se considera relatia $f(x) = (f(0) \cup x) \bullet (f(1) \cup \bar{x})$ in FCC si se inlocuieste x pe rand cu valorile 0 si 1.

$$\begin{cases} f(1) = (f(0) \cup 1) \bullet (f(1) \cup \bar{1}) = (f(0) \cup 1)(f(1) \cup 0) = 1 \bullet f(1) = f(1) \\ f(0) = (f(0) \cup 0) \bullet (f(1) \cup \bar{0}) = (f(0) \cup 0)(f(1) \cup 1) = f(0) \bullet 1 = f(0) \end{cases}$$

FCD pentru o funcție cu două variabile

Fie $f : B_2 \times B_2 \rightarrow B_2$ o funcție booleană de două variabile
și a, b, c, d constante booleene

$f(x, y) = axy \cup bx\bar{y} \cup c\bar{x}y \cup d\bar{x}\bar{y}$ - forma canonica disjunctiva

$f(x, y) = (a \cup x \cup y)(b \cup x \cup \bar{y})(c \cup \bar{x} \cup y)(d \cup \bar{x} \cup \bar{y})$ - forma canonica conjunctiva

Consideram forma FCD si inlocuim $x=1, x=0$ in relatia lui $f(x)$. Vom avea :

$$\begin{cases} a = f(1,1) \\ b = f(1,0) \\ c = f(0,1) \\ d = f(0,0) \end{cases}$$

$$FCD: f(x, y) = f(1,1)xy \cup f(1,0)x\bar{y} \cup f(0,1)\bar{x}y \cup f(0,0)\bar{x}\bar{y}$$

FCC pentru o funcție cu două variabile

$f(x, y) = (a \cup x \cup y)(b \cup x \cup \bar{y})(c \cup \bar{x} \cup y)(d \cup \bar{x} \cup \bar{y})$ - forma canonica conjunctiva

Inlocuim in expresia de mai sus $x=1, x=0$ si obtinem :

$$\begin{cases} a = f(0,0) \\ b = f(0,1) \\ c = f(1,0) \\ d = f(1,1) \end{cases}$$

$$FCC : f(x, y) = (f(0,0) \cup x \cup y)(f(0,1) \cup x \cup \bar{y})(f(1,0) \cup \bar{x} \cup y)(f(1,1) \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

Demonstrarea existenței în cazul formei canonice disjunctive

$f(x, y) = f(1,1)xy \cup f(1,0)x\bar{y} \cup f(0,1)\bar{x}y \cup f(0,0)\bar{x}\bar{y}$ - forma canonica disjunctiva

Consideram expresia de mai sus si inlocuim $x=1, x=0, y=1, y=0$ si obtinem :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=y=1 \Rightarrow f(1,1) = f(1,1) \bullet 1 \bullet 1 \cup f(1,0) \bullet 1 \bullet \bar{1} \cup f(0,1) \bullet \bar{1} \bullet 1 \cup f(0,0) \bullet \bar{1} \bullet \bar{1} = f(1,1) \\ x=1, y=0 \Rightarrow f(1,0) = f(1,1) \bullet 1 \bullet 0 \cup f(1,0) \bullet 1 \bullet \bar{0} \cup f(0,1) \bullet \bar{1} \bullet 0 \cup f(0,0) \bullet \bar{1} \bullet \bar{0} = f(1,0) \\ x=0, y=1 \Rightarrow f(0,1) = f(1,1) \bullet 0 \bullet 1 \cup f(1,0) \bullet 0 \bullet \bar{1} \cup f(0,1) \bullet \bar{0} \bullet 1 \cup f(0,0) \bullet \bar{0} \bullet \bar{1} = f(0,1) \\ x=y=0 \Rightarrow f(0,0) = f(1,1) \bullet 0 \bullet 0 \cup f(1,0) \bullet 0 \bullet \bar{0} \cup f(0,1) \bullet \bar{0} \bullet 0 \cup f(0,0) \bullet \bar{0} \bullet \bar{0} = f(0,0) \end{array} \right.$$

Demonstrarea existenței în cazul formei canonice conjunctive

$$FCC: f(x, y) = (f(0,0) \cup x \cup y)(f(0,1) \cup x \cup \bar{y})(f(1,0) \cup \bar{x} \cup y)(f(1,1) \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

Considerăm expresia de mai sus și înlocuim $x=1, x=0, y=1, y=0$ și obținem:

$$\begin{cases} x = y = 1 \Rightarrow f(1,1) = (f(0,0) \cup 1 \cup 1)(f(0,1) \cup 1 \cup \bar{1})(f(1,0) \cup \bar{1} \cup 1)(f(1,1) \cup \bar{1} \cup \bar{1}) = f(1,1) \\ x = 1, y = 0 \Rightarrow f(1,0) = (f(0,0) \cup 1 \cup 0)(f(0,1) \cup 1 \cup \bar{0})(f(1,0) \cup \bar{1} \cup 0)(f(1,1) \cup \bar{1} \cup \bar{0}) = f(1,0) \\ x = 0, y = 1 \Rightarrow f(0,1) = (f(0,0) \cup 0 \cup 1)(f(0,1) \cup 0 \cup \bar{1})(f(1,0) \cup \bar{0} \cup 1)(f(1,1) \cup \bar{0} \cup \bar{1}) = f(0,1) \\ x = y = 0 \Rightarrow f(0,0) = (f(0,0) \cup 0 \cup 0)(f(0,1) \cup 0 \cup \bar{0})(f(1,0) \cup \bar{0} \cup 0)(f(1,1) \cup \bar{0} \cup \bar{0}) = f(0,0) \end{cases}$$

Tabele de adevar

Oricărei funcții logice i se poate asocia un tabel de adevăr

$$f(x, y) = \overline{x} \overline{y} \cup xy$$

x	y	$\overline{x} \bullet \overline{y}$	$x \bullet y$	$f(x, y)$	$\overline{f(x, y)}$
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0

Tabele de adevăr (cont.)

Reciproc, dacă avem un tabel de adevăr se poate determina expresia funcției

Din tabelul de adevăr $f = 1$ pentru următoarele valori ale lui x și y :

$$\begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \bar{x} = 1, \bar{y} = 1 \\ x = y = 1 \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = \bar{x} \bullet \bar{y} \cup x \bullet y$$

Tabele de adevăr (cont.)

Consideram acum valorile lui x și y pentru care $f = 0$:

$$\begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = 0, \bar{y} = 0 \\ \bar{x} = 0, y = 0 \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = (x \cup \bar{y})(\bar{x} \cup y)$$

Tabele de adevăr (cont.)

Cele două funcții sunt egale:

$$f_2(x, y) = (x \cup \bar{y})(\bar{x} \cup y) = x\bar{x} \cup xy \cup \bar{y}\bar{x} \cup \bar{y}y = xy \cup \bar{x}\bar{y} = f_1(x, y)$$

Forme de reprezentare ale funcțiilor booleene

Forme *canonice*:

- ♦ Forma ***minterm*** (FCD – forma canonică disjunctivă) – SUMĂ de produse – variabilele sau complementele lor în cadrul unui mintermen sunt legate prin operația booleană ȘI, iar mintermenii sunt legați prin operația booleană SAU.
- ♦ Forma ***maxterm*** (FCC – forma canonică conjunctivă) – PRODUS de sume – variabilele sau complementele lor în cadrul unui maxtermen sunt legate prin operația booleană SAU, iar maxtermenii sunt legați prin operația booleană ȘI.

O altă formă de reprezentare a funcțiilor booleene este cea grafică cu ajutorul diagramelor Venn

Mintermeni/maxtermeni pentru o funcție de 2 variabile booleene

Funcție de 2 variabile			
x	y	Mintermeni m_i	Maxtermeni M_i
0	0	$m_0 = \overline{x}\overline{y}$	$M_0 = x \cup y$
0	1	$m_1 = \overline{x}y$	$M_1 = x \cup \overline{y}$
1	0	$m_2 = x\overline{y}$	$M_2 = \overline{x} \cup y$
1	1	$m_3 = xy$	$M_3 = \overline{x} \cup \overline{y}$

Mintermeni/maxtermeni pentru o funcție de 3 variabile booleene

Funcție de 3 variabile				
x	y	z	Mintermeni m_i	Maxtermeni M_i
0	0	0	$m_0 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$M_0 = x \cup y \cup z$
0	0	1	$m_1 = \bar{x}\bar{y}z$	$M_1 = x \cup y \cup \bar{z}$
0	1	0	$m_2 = \bar{x}y\bar{z}$	$M_2 = x \cup \bar{y} \cup z$
0	1	1	$m_3 = \bar{x}yz$	$M_3 = x \cup \bar{y} \cup \bar{z}$
1	0	0	$m_4 = x\bar{y}\bar{z}$	$M_4 = \bar{x} \cup y \cup z$
1	0	1	$m_5 = x\bar{y}z$	$M_5 = \bar{x} \cup y \cup \bar{z}$
1	1	0	$m_6 = xy\bar{z}$	$M_6 = \bar{x} \cup \bar{y} \cup z$
1	1	1	$m_7 = xyz$	$M_7 = \bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z}$

Proprietăți mintermeni/maxtermeni

Mintermenii sunt formați din combinația variabilelor sau a complementelor lor pentru care funcția are valoarea 1.

Maxtermenii sunt formați din combinația variabilelor sau a complementelor lor pentru care funcția are valoarea 0.

$$m_i = \overline{M}_i$$

$$M_i = \overline{m}_i, \forall i$$

Proprietăți mintermeni/maxtermeni (cont.)

P1. Produsul logic între doi termeni m_i și m_j ($i \neq j$) ai unei funcții booleene de n variabile este egal cu 0:

$$m_i \cdot m_j = 0, \forall i \neq j$$

P2. Suma logică dintre doi termeni M_i și M_j ($i \neq j$) ai unei funcții booleene de n variabile este egal cu 1:

$$M_i \cup M_j = 1, \forall i \neq j$$

Proprietăți mintermeni/maxtermeni (cont.)

P3. O funcție booleană de n variabile poate fi reprezentată printr-o sumă logică de mintermeni $\mathbf{m}_i$ (respectiv un produs logic de maxtermeni $\mathbf{M}_i$) sub forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i \cdot m_i)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcap_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i \cup M_i), \alpha_i \in \{0,1\} - \text{numere caracteristice}$$

Proprietăți mintermeni/maxtermeni (cont.)

P4. Complementul unei funcții booleene de n variabile scrise în FCC poate fi exprimat în mod unic prin relația:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} (\bar{\alpha}_i \cdot m_i)$$

iar complementul unei funcții booleene de n variabile scrise în FCD poate fi exprimat în mod unic prin :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcap_{i=0}^{2^n-1} (\bar{\alpha}_i \cup M_i), \alpha_i \in \{0,1\}$$

Proprietăți mintermeni/maxtermeni (cont.)

P5. Dacă o funcție booleană de n variabile este scrisă în FCD și conține 2^n termeni distincți de n variabile atunci ea este egală cu 1.
În aceleași condiții, dacă funcția este scrisă în FCC, atunci ea este egală cu 0.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \text{ (FCD)}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcap_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0 \text{ (FCC)}$$

Proprietăți mintermeni/maxtermeni (cont.)

P6. Orice mintermen $\mathbf{m}_i$ al unei funcții booleene de $\mathbf{n}$ variabile scrise în **FCD** este egal cu produsul logic a $2^n - 1$ termeni $\mathbf{M}_j$, respectiv orice maxtermen $\mathbf{M}_i$ al unei funcții booleene de $\mathbf{n}$ variabile scrisă în **FCC** este egal cu suma logică a $2^n - 1$ termeni $\mathbf{m}_j$:

$$m_i = \bigcap_{j \neq i} M_j, j = 0 \dots 2^n - 1$$

$$M_i = \bigcup_{j \neq i} m_j, j = 0 \dots 2^n - 1$$

Funcțiile booleene de 2 variabile

Pentru o funcție de 2 variabile avem următoarele forme canonice:

$$f(x, y) = \alpha_0 m_0 \cup \alpha_1 m_1 \cup \alpha_2 m_2 \cup \alpha_3 m_3 \text{ (FCD)}$$

$$f(x, y) = (\alpha_0 \cup M_0)(\alpha_1 \cup M_1)(\alpha_2 \cup M_2)(\alpha_3 \cup M_3) \text{ (FCC)}$$

De aici rezultă 16 funcții de două variabile, în forma cu mintermeni/maxtermeni, din cele 16 combinații posibile pentru

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Funcțiile booleene de 2 variabile (cont.)

$f_0 = 0$ – funcția ZERO (FALSE)

$f_1 = xy$ – funcția SI

$f_2 = x\bar{y}$ – funcția INHIBARE

$f_3 = x$ – funcția IDENTITATE

$f_4 = \bar{x}y$ – funcția INHIBARE

$f_5 = y$ – funcția IDENTITATE

$f_6 = \bar{x}y \cup x\bar{y}$ – funcția SAU - EXCLUSIV(XOR)

$f_7 = x \cup y$ – funcția SAU (SAU - INCLUSIV)

Funcțiile booleene de 2 variabile (cont.)

$$f_8 = \overline{x \cup y} = \overline{\overline{\overline{x}y}} - \text{funcția SAU - NU (NOR)}$$

$$f_9 = \overline{\overline{\overline{x}y} \cup xy} - \text{funcția COINCIDENTA}$$

$$f_{10} = \overline{y} - \text{funcția NU}$$

$$f_{11} = x \cup \overline{y} - \text{funcția IMPLICARE}$$

$$f_{12} = \overline{x} - \text{funcția NU}$$

$$f_{13} = \overline{x} \cup y - \text{funcția IMPLICARE}$$

$$f_{14} = \overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y} - \text{funcția SI - NU (NAND)}$$

$$f_{15} = 1 - \text{funcția UNU (TRUE)}$$

Dezvoltarea unei funcții booleene

Fie funcția : $f(x, y, z) = \bar{x} \cup y\bar{z}$

Sa se aduca la FCD.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \bar{x}(y \cup \bar{y}) \cup y\bar{z}(x \cup \bar{x}) = \bar{x}y \cup \bar{x}\bar{y} \cup xy\bar{z} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \\ &\bar{x}y(z \cup \bar{z}) \cup \bar{x}\bar{y}(z \cup \bar{z}) \cup xy\bar{z} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{x}yz \cup \bar{x}y\bar{z} \cup \bar{x}\bar{y}z \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z} \cup xy\bar{z} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \\ &m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_6 \end{aligned}$$